УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

К.К.ГАСАНОВ, Т.С.ТАНРЫВЕРДИЕВ
Бакинский Государственный Университет
telman_bsu@box.az

В данной работе рассматривается задача оптимального управления, описываемой гиперболической системой первого порядка с двумя независимыми переменными. Критерий оптимальности представляет собой интегральный квадратичный функционал. Доказано существование единственного оптимального управления. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности управления. Нахождение оптимального управления и минимума функционала сводится к решению нелинейной интегро-дифференциальной системы с частными производными. Далее, аналогичные результаты получены для бесконечного интервала по времени.

Ключевые слова: гиперболическая система, интегро-дифференциальные уравнения, оптимальное управление, сопряжённая задача, смешанная задача.

При решении практических задач теории оптимизации управления объектов с распределёнными параметрами особое место занимают гиперболические системы. В работах [2,3.7,8] доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши и смешанной задачи для гиперболических систем первого порядка с двумя независимыми переменными. Работы [9,10] посвящены исследованию задачи оптимального управления, описываемых гиперболической системой первого порядка.

1. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс в области $\Omega=\{0<x<l,\ 0<t<T\}$ описывается каноническим видом линейной гиперболической системы по Петровскому

$$\frac{\partial z_i}{\partial t}+\lambda_i(x,t)\frac{\partial z_i}{\partial x}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)z_j+\sum_{j=1}^{r}c_{ij}(x,t)u_j\,,\ \ i=1,2,...,n_0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial t}-\lambda_i(x,t)\frac{\partial z_i}{\partial x}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)z_j+\sum_{j=1}^{r}c_{ij}(x,t)u_j\,,\ \ i=n_0+1,\,n_0+2,...,n$$

с граничными условиями

$$z_i(0,t)=\sum_{j=n_0+1}^{n}\alpha_{ij}z_j(0,t)\ ,\ i=1,2,...,n_0\ ,$$
$$t\in[0,T] \qquad (2)$$
$$z_i(l,t)=\sum_{j=1}^{n_0}\beta_{ij}z_j(l,t)\ ,\ i=n_0+1,\ n_0+2,...,n$$

и начальным условием

$$z_i(x,0)=\varphi_i(x),\quad i=1,2,...,n,\quad x\in[0,l], \qquad (3)$$

где $\lambda_i(x,t)>0,\ \ i=1,2,...,n$.

Левой границей характеристики с положительным наклоном $\frac{dx}{dt}>0$ назовём «уходящие», а с отрицательным наклоном «приходящие». Для правой границы характеристики с $\frac{dx}{dt}>0$ - «приходящие», а с $\frac{dx}{dt}<0$ - «уходящие» ([2], стр.183).

Граничные условия, заданные на одной из границ, называются диссипативными, если в точках этой границы для любых функций $(z_1(x,t),z_2(x,.t),...,z_n(x,t))$, удовлетворяющих граничным условиям, выполнено неравенство

$$-\sum_{\textbf{\textit{по приходящим }} i}\lambda_i z_i^2+\sum_{\textit{по уходящим } i}\lambda_i z_i^2\le 0\,, \qquad (4)$$

Предположим, что на каждой из границ выполняются неравенства (4).

Положим

$$\Lambda(x,t)=diog(\lambda_1(x,t),...,\lambda_{n_0}(x,t),-\lambda_{n_0+1}(x,t),...,-\lambda_n(x,t)),$$

$$A(x,t)=\begin{pmatrix} a_{11}(x,t) & a_{12}(x,t) & .... & a_{1n}(x,t)\\ a_{21}(x,t) & a_{22}(x,t) & ...... & a_{2n}(x,t)\\ .... & .... & ...... & ....\\ a_{n1}(x,t) & a_{n2}(x,t) & .... & a_{nn}(x,t)\end{pmatrix},$$

$$C(x,t)=\begin{pmatrix} c_{11}(x,t) & c_{12}(x,t) & .... & c_{1r}(x,t)\\ c_{21}(x,t) & c_{22}(x,t) & ...... & c_{2r}(x,t)\\ .... & .... & ...... & ....\\ c_{r1}(x,t) & c_{r2}(x,t) & .... & c_{rr}(x,t)\end{pmatrix},$$

$$\alpha=\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & \alpha_{1n_0+1} & ... & \alpha_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & \alpha_{n_0n_0+1} & ... & \alpha_{n_0n} \\ 0 & ... & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \\ \beta_{n_0+1,1} & ... & \beta_{n_0+1,n_0} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \beta_{n1} & ... & \beta_{nn_0} & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

$z=(z_1,z_2,...,z_n)'$, $u=(u_1,u_2,...,u_r)'$, $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x))'$ штрих $(\,'\,)$ означает транспонирование.

Задачу (1)-(3) можно записать в матричных обозначениях в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\Lambda(x,t)\frac{\partial z}{\partial x}=A(x,t)z+C(x,t)u\,, \tag{1'}$$

$$z(0,t)=\alpha\, z(0,t),\; z(l,t)=\beta\, z(l,t)\,, \tag{2'}$$

$$z(x,0)=\varphi(x)\,. \tag{3'}$$

Допустимые управления $u(x,t)$ являются любыми функциями из $L_2^r(\Omega)$.

Предполагается, что удовлетворяются следующие условия:

а) $\Lambda(x,t), A(x,t), C(x,t)$ непрерывные матрицы и кроме того, матрица $\Lambda(x,t)$ имеет непрерывную производную по x;

б) начальная функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,l]$.

Предположим, что для каждого допустимого управления $u(x,t)$ существует единственное решение $z(x,t)$ смешанной задачи (1)-(3), определённое в области Ω [2,3,8].

Требуется в классе допустимых управлений найти такое управление $u(x,t)$ и соответствующее ему решение $z(x,t)$ смешанной задачи (1)-(3), что интегральный квадратичный критерий качества

$$J(u)=\int_0^l z'(x,T)F(x)z(x,T)dx+\iint_\Omega [z'(x,t)W(x,t)z(x,t)+ \\ +u'(x,t)U(x,t)u(x,t)]dxdt \tag{4}$$

принимал наименьшее возможное значение, где $F(x), W(x,t)-(n\times n)$-симметричные, неотрицательные и непрерывные матрицы. $U(x,t)-(r\times r)$-мерное симметричная, положительно-определённая и непрерывная матрица.

2. Существование и единственность оптимального управления.

Теорема 1. *Пусть выполняются все условия, наложенные на данные задачи оптимального управления. Тогда в задаче (1)-(4) существует единственное оптимальное управление.*

Доказательство. Пусть $\{u_m(x,t)\}$ последовательность допустимых управлений, для которой последовательность $J(u_m)$ монотонно, убывая, стремится к $\inf J(u)$:

$$\lim_{m\to\infty} J(u) = \lim_{m\to\infty}\left\{\int_0^l z'_m(x,T)F(x)z_m(x,T)dx + \right.$$

$$\left. + \iint_\Omega [z'_m(x,t)W(x,t)z_m(x,t) + u'_m(x,t)U(x,t)u_m(x,t)]\,dxdt\right\} = \inf J(u)\,, \quad (5)$$

где $z_m(x,t)$ - решение смешанной задачи (1)-(3) при управлении $u_m(x,t)$. Тогда последовательность $\{u_m(x,t)\}$ будет в $L_2^r(\Omega)$ ограничена. Поэтому из последовательности $\{u_m(x,t)\}$ можно извлечь такую подпоследовательность (снова обозначим её через $u_m(x,t)$, которая слабо в $L_2^r(\Omega)$ сходится к некоторой функции $u_0(x,t) \in L_2^r(\Omega)$. Обозначим через $z_0(x,t)$ решение смешанной задачи (1)-(3) при управлении $u_0(x,t)$.

Так как последовательность $\{u_m(x,t)\}$ слабо в $L_2^r(\Omega)$ сходится к $u_0(x,t)$, то существует последовательность линейных комбинаций

$$\sum_{k=1}^{k_m} C_k^{(m)} u_k(x,t)$$

сильно в $L_2^r(\Omega)$, сходящаяся к $u_0(x,t)$. Положим

$$\overline{u}_m(x,t) = \sum_{k=1}^{k_m} C_k^{(m)} u_k(x,t)$$

и обозначим через $\overline{z}_m(x,t)$ решение смешанной задачи (1)-(3) при управлении $\overline{u}_m(x,t)$. Докажем, что последовательность $\overline{z}_m(x,t)$ сходится равномерно по t в $L_2^n(0,l)$ сходится к функции $z_0(x,t)$ при $m \to \infty$.

Имеет место следующее тождество

$$\int_0^t\int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial t}(\overline{z}_m(x,\tau) - z_0(x,\tau), \overline{z}_m(x,\tau) - z_0(x,\tau)) + \frac{\partial}{\partial x}(\Lambda(x,\tau)(\overline{z}_m(x,\tau) - \right.$$

$$\left. - z_0(x,\tau), \overline{z}_m(x,\tau) - z_0(x,\tau))\right]dxd\tau = \int_0^t\int_0^l \left[D(x,\tau)(\overline{z}_m(x,\tau) - z_0(x,\tau)), \right. \quad (6)$$

$$\left. \overline{z}_m(x,\tau) - z_0(x,\tau)) + 2(C(x,\tau)(\overline{u}_m(x,\tau) - u_0(x,\tau), \overline{z}_m(x,\tau) - z_0(x,\tau))\right]dxd\tau\,,$$

где $D(x,t) = 2A(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\Lambda(x,t)$.

Из равенства (6) имеем

$$\int_0^l \left|\bar z_m(x,t)-z_0(x,t)\right|^2 dx+\int_0^t (\bar z_m(x,\tau)-z_0(x,\tau))'\Lambda(x,\tau)(\bar z_m(x,\tau)-z_0(x,\tau))\Big|_0^l d\tau=$$

$$=\int_0^t\int_0^l\left[(\bar z_m(x,\tau)-z_0(x,\tau))'D'(x,\tau)(\bar z_m(x,\tau)-z_0(x,\tau))+(\bar u_m(x,\tau)-u_0(x,\tau))'\right.$$

$$\left.C'(x,\tau)(\bar z_m(x,\tau)-z_0(x,\tau))\right]dxd\tau.$$

Отсюда, в силу условия (4), можно написать

$$\int_0^l \left|\bar z_m(x,t)-z_0(x,t)\right|^2 dx\le\int_0^t\int_0^l\Big\{\left|(\bar z_m(x,\tau)-z_0(x,\tau))'D'(x,\tau)(\bar z_m(x,\tau)-(z_0(x,\tau))\right|+$$

$$+\left|(\bar u_m(x,\tau)-u_0(x,\tau))'C'(x,\tau)(\bar z_m(x,\tau)-z_0(x,\tau))\right|\Big\}dxd\tau.$$

Используя неравенство $2ab\le a^2+b^2$ имеем

$$\int_0^l \left|\bar z_m(x,t)-z_0(x,t)\right|^2 dx\le\int_0^t\int_0^l\Big\{M\left|\bar z_m(x,\tau)-z_0(x,\tau)\right|^2+$$

$$+N\left|\bar u_m(x,\tau)-u_0(x,\tau)\right|^2\Big\}dxd\tau,$$

где M,N - константы.

Положим

$$v(t)=\int_0^l \left|\bar z_m(x,t)-z_0(x,t)\right|^2 dx\ .$$

Последнее неравенство запишем в виде

$$v(t)\le M\int_0^l v(\tau)d\tau+N\int_0^t\int_0^l\left|\bar u_m(x,\tau)-u_0(x,\tau)\right|^2 dxd\tau\ .$$

В силу леммы Гронуолла, получим

$$\int_0^l \left|\bar z_m(x,t)-z_0(x,t)\right|^2 dx\le L\iint_\Omega\left|\bar u_m(x,\tau)-u_0(x,\tau)\right|^2 dxdt\,, \tag{7}$$

где $L=const>0$.

Отсюда следует, что последовательность $\{\bar z_m(x,t)\}$ равномерно по $t\in[0,T]$ сходится в $L_2^n(0,l)$ к функции $z_0(x,t)$. Отметим, что функционал $J(u)$ полупрерывен снизу на $L_2^r(\Omega)$, поэтому он слабо полупрерывен снизу на $L_2^r(\Omega)$ ([1], стр.52).

Из (5) имеем

$$J(u_0)\le\lim_{m\to\infty}J(\bar u_m)=\int_0^l z_0'(x,T)F(x)z_0(x,T)dx+$$

$$+\iint_{\Omega}[z_0'(x,t)W(x,t)z_0(x,t)+u_0'(x,t)U(x,t)u_0(x,t)]dxdt\,.$$

Следовательно, $u_0(x,t)$ оптимальное управление, а $z_0(x,t)$ - решение смешанной задачи (1)-(3) при управлении $u_0(x,t)$.

Теперь докажем единственность оптимального управления. Пусть $u(x,t)$ и $v(x,t)$ два различных оптимальных управления. Обозначим через $z_u(x,t)$ и $z_v(x,t)$ - решение смешанной задачи (1)-(3) при управлениях $u(x,t)$ и $v(x,t)$, соответственно.

Положим

$$u_\lambda(x,t)=\lambda u(x,t)+(1-\lambda)v(x,t),\quad \lambda\in(0,1),\ (x,t)\in\Omega\,.$$

Тогда

$$z_\lambda(x,t)=\lambda z_u(x,t)+(1-\lambda)z_v(x,t)$$

является решением смешанной задачи (1)-(3) при управлении $u_\lambda(x,t)$. Из строгой выпуклости функционала (4) следует справедливость неравенства

$$J(u_\lambda)<\lambda J(u)+(1-\lambda)J(v)=\inf J(u),\ \forall u\in L_2^r(\Omega)\,.$$

Следовательно, наименьшее значение функционал $J(u)$ достигает при управлении $u_\lambda(x,t)$. Получается противоречие. Это противоречие доказывает единственность оптимального управления.

3. Необходимое и достаточное условия оптимальности.

Введём сопряженную задачу как решение системы уравнений

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\Lambda(x,t)P)+A'(x,t)P=W(x,t)z \tag{8}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}&\Lambda(0,t)P(0,t)=\alpha'\Lambda(0,t)P(0,t),\\&\Lambda(l,t)P(l,t)=\beta'\Lambda(l,t)P(l,t)\end{aligned} \tag{9}$$

и с конечным условием

$$P(x,T)+F(x)z(x,T)=0\,. \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть* $u(x,t)$ *допустимое управление, а* $z(x,t)$ *решение смешанной задачи (1)-(3) при этом управлении. Необходимым условием оптимальности* $u(x,t)$ *является существование решения системы*

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\Lambda(x,t)\frac{\partial z}{\partial x}-A(x,t)z=Q(x,t)P\,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\Lambda(x,t)P)+A'(x,t)P=W(x,t)z\,, \tag{8}$$

удовлетворяющего условиям (2),(3) и (9),(10), *где*

$$Q(x,t)=C(x,t)U^{-1}(x,t)C'(x,t)\,.$$

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ оптимальное управление, а $z(x,t)$ - решение задачи (1)-(3) при этом управлении. Докажем, что существует решение системы (11), (8). Для фиксированной $r(x,t)\in L_2^r(\Omega)$, положим

$$u_\varepsilon(x,t)=u(x,t)+\varepsilon r(x,t),\ (x,t)\in\Omega,\ \varepsilon \text{ - число.}$$

Тогда для решения $z_\varepsilon(x,t)$ задачи (1)-(3) при управлении $u_\varepsilon(x,t)$, имеем

$$z_\varepsilon(x,t)=z(x,t)+\varepsilon\Phi(x,t),$$

где $\Phi(x,t)$ определяется как решение задачи

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Lambda(x,t)\frac{\partial\Phi}{\partial x}-A(x,t)\Phi=C(x,t)r(x,t), \tag{12}$$

$$\Phi(0,t)=\alpha\,\Phi(0,t),\ \Phi(l,t)=\beta\,\Phi(l,t),\ \Phi(x,0)=0. \tag{13}$$

Представим приращение функционала в виде

$$\Delta J(u)=J(u_\varepsilon)-J(u)=2\varepsilon\int_0^l z'(x,T)F(x)\Phi(x,T)dx+$$

$$+2\varepsilon\iint_\Omega[z'(x,t)W(x,t)\Phi(x,t)+u'(x,t)U(x,t)r(x,t)]dxdt+$$

$$+2\varepsilon\iint_\Omega P'(x,t)\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Lambda(x,t)\frac{\partial\Phi}{\partial x}-A(x,t)\Phi(x,t)-C(x,t)r(x,t)\right]dxdt+\eta(\varepsilon), \tag{14}$$

где

$$\eta(\varepsilon)=\varepsilon^2\int_0^l\Phi'(x,T)F(x)\Phi(x,T)dx+\varepsilon^2\iint_\Omega[\Phi'(x,t)W(x,t)\Phi(x,t)+$$

$$+r'(x,t)U(x,t)r(x,t)]dxdt.$$

Из (14) интегрируя по частям, имеем

$$\iint_\Omega P'(x,t)\frac{\partial\Phi}{\partial t}dxdt=\int_0^l P'(x,T)\Phi(x,T)dx-\iint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)'\Phi(x,t)dxdt,$$

$$\iint_\Omega P'(x,t)\Lambda(x,t)\frac{\partial\Phi}{\partial x}dxdt=\int_0^T P'(x,t)\Lambda(x,t)\Phi(x,t)\Big|_0^l dt-\iint_\Omega\frac{\partial}{\partial x}(P'(x,t)\Lambda(x,t)\Phi(x,t)dxdt$$

.

Учитывая полученные равенства в (14) и пользуясь тем, что $P(x,t)$ - решение задачи (8)-(10), получим

$$\Delta J(u)=2\varepsilon\iint_\Omega[u'(x,t)U(x,t)-P'(x,t)C(x,t)]r(x,t)dxdt+\eta(\varepsilon). \tag{15}$$

Для решения $\Phi(x,t)$ задачи (12).(13) имеет место следующее тождество, носящее название интеграла энергии ([2], стр.193):

$$\int_0^t\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial t}(\Phi,\Phi)+\frac{\partial}{\partial x}(\Lambda(x,t)\Phi,\Phi)\right]dxdt=\int_0^t\int_0^l[(D(x,t)\Phi,\Phi)+$$

$$+2(C(x,t)r(x,t),\Phi(x,t))]dxdt\,.$$

Отсюда, рассуждая аналогично при получении оценки интегралов энергии (7), имеем

$$\int_0^l |\Phi(x,t)|^2 dx \le L\int_0^t\int_0^l |r(x,\tau)|^2 dxd\tau \le L\|r\|^2_{L_2^r(\Omega)}\,.$$

В силу выражения $\eta(\varepsilon)$, имеем

$$\eta(\varepsilon)=o(\varepsilon)\,.$$

Так как $u(x,t)$ - оптимальное управление, то для любых $r(x,t)$ из $L_2^r(\Omega)$ верно неравенство

$$\Delta J(u)=2\varepsilon\iint_\Omega [u'(x,t)U(x,t)-P'(x,t)C(x,t)]r(x,t)dxdt+o(\varepsilon)\ge 0\,.$$

Здесь членом $o(\varepsilon)$ можно пренебречь, а числа ε может быть как положительным, так и отрицательным, поэтому

$$\iint_\Omega [u'(x,t)U(x,t)-P'(x,t)C(x,t)]r(x,t)dxdt=0\,. \tag{16}$$

Так как равенство (16) выполняется для любого $r(x,t)$ из $L_2^r(\Omega)$, то

$$u'(x,t)U(x,t)-P'(x,t)C(x,t)=0 \text{ почти везде в } \Omega\,.$$

Отсюда, имеем

$$u(x,t)=U^{-1}(x,t)C'(x,t)P(x,t) \text{ почти везде в } \Omega\,. \tag{17}$$

Подставив вместо $u(x,t)$ выражение (17) в уравнении (1), получим уравнение (11). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть существует решение* $(z(x,t),P(z,t))$ *задачи (11), (8), (2),(3),(9),(10). Тогда оптимальное управление* $u(x,t)$ *задачи (1)-(4), определяется равенством (17).*

Доказательство. Пусть $(z(x,t),P(z,t))$ решение задачи (8),(11), (21,13),(9),(10) и $u(x,t)$ определена равенством (17).

Положим, для любых $r(x,t)$ из $L_2^r(\Omega)$,

$$\bar{u}(x,t)=u(x,t)+r(x,t),\ \ \bar{z}(x,t)=z(x,t)+\Phi(x,t)\,,$$

где $\Phi(x,t)$ является решение задачи (12),(13).

Аналогично тому, как было получено (15), имеем

$$\Delta J(u)=2\iint_\Omega [u'(x,t)U(x,t)-P'(x,t)C(x,t)]r(x,t)dxdt+\eta\,, \tag{18}$$

где

$$\eta=\iint_\Omega [\Phi'(x,t)W(x,t)\Phi(x,t)+r'(x,t)U(x,t)r(x,t)]dxdt\ge 0\,. \tag{19}$$

Отсюда, если в равенстве (18) подставим вместо $u(x,t)$ её выражение (17), получим

$$\Delta J(u) = \eta \geq 0 .$$

Из полученного неравенства следует, что управление, определённое равенством (17), является оптимальным управлением в задаче (1)-(4). Теорема доказана.

4. Нелинейная интегро-дифференциальная система. Пусть $G(x,s;t)-(n\times n)$ - матрица определена в области D $(0<x<l,\, 0<s<l,\, 0<t<T)$, является решением системы

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\Lambda(x,t)G)+\frac{\partial}{\partial s}(G\Lambda(s,t))+A'(x,t)G+GA(s,t)+$$
$$+\int_0^l G(x,\sigma,t)Q(\sigma,t)G(\sigma,s,t)d\sigma = \Phi(x,s)W(x,t) , \tag{20}$$

удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned}
&\Lambda(o,t)G(o,s,t)=\alpha'\Lambda(o,t)G(o,s,t),\\
&\Lambda(l,t)G(l,s,t)=\beta'\Lambda(l,t)G(l,s,t),\\
&\Lambda(o,t)G(x,o,t)=\alpha'\Lambda(o,t)G(x,o,t),\\
&\Lambda(l,t)G(x,l,t)=\beta'\Lambda(l,t)G(x,l,t)
\end{aligned} \tag{21}$$

и начальному условию

$$G(x,s,T)+\Phi(x,s)F(s)=0 , \tag{22}$$

где для $\Phi(x,s)$ верно равенство

$$\int_0^l \Phi(x,s)W(s,t)z(s,t)ds = W(x,t)z(x,t) . \tag{23}$$

Теорема 4. *Пусть* $G(x,s,t)$ *- решение задачи (20)-(22). Тогда для оптимального процесса* $(u(x,t),z(x,t))$ *задачи (1)-(4), функция*

$$P(x,t)=\int_0^l G(x,s,t)z(s,t)ds \tag{24}$$

является решением сопряжённой задачи (8)-(10), а оптимальное управление $u(x,t)$ *имеем вид (17). Минимальное значение функционала (4) равно*

$$J(u)=-\int_0^l\int_0^l \varphi'(x)G(x,s,o)\varphi(s)dxds . \tag{25}$$

Доказательство. Из (24) имеем

$$P_t(x,t)=\int_0^l [G_t(x,s,t)z(s,t)+G(x,s,t)z_t(s,t)]ds ,$$

$$(\Lambda(x,t)P(x,t))_x = \int_0^l (\Lambda(x,t)G(x,s,t))_x z(s,t)ds,$$

$$A'(x,t)P(x,t) = \int_0^l A'(x,t)G(x,s,t)z(s,t)ds.$$

Подставив полученные выражения в уравнение (8) и учитывая равенство (9), имеем

$$\int_0^l \{G_t(x,s,t)z(s,t) + G(x,s,t)[-\Lambda(s,t)z_s(s,t) + A(s,t)z(s,t) +$$

$$+ Q(s,t)\int_0^l G(s,\sigma,t)z(\sigma,t)d\sigma] + (\Lambda(x,t)G(x,s,t))_x z(s,t) +$$

$$+ A'(x,t)G(x,s,t)z(s,t) - \Phi(x,s)W(s,t)z(s,t)\}ds = 0. \qquad (26)$$

Отсюда интегрируя по частям и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\int_0^l G(x,s,t)\Lambda(s,t)z_s(s,t)ds = G(x,s,t)\Lambda(s,t)z(s,t)\Big|_0^l - \int_0^l (G(x,s,t)\Lambda(s,t))_s z(s,t)ds,$$

$$\int_0^l G(x,s,t)Q(s,t)\left(\int_0^l G(s,\sigma,t)z(\sigma,t)d\sigma\right)ds = \int_0^l\left(\int_0^l G(x,\sigma,t)Q(\sigma,t)G(\sigma,s,t)d\sigma\right)z(s,t)ds.$$

Учитывая граничные условия (21) и полученные равенства в (26), имеем:

$$\int_0^l \Big\{G_t(x,s,t) + (G(x,s,t)\Lambda(s,t))_s + (\Lambda(x,t)G(x,s,t))_x + G(x,s,t)A(s,t) +$$

$$+ A'(x,t)G(x,s,t) + \int_0^l G(x,\sigma,t)Q(\sigma,t)G(\sigma,s,t)d\sigma - \Phi(x,s)W(s,t)\Big\}z(s,t)ds = 0.$$

Так как, $G(x,s,t)$ является решением системы (20), то получим, что функция $P(x,t)$, определенная формулой (24), является решением задачи (8)-(10). Оптимальное управление $u(x,t)$ определена формулой (17). В формуле вместо $P(x,t)$ подставив (24), получим

$$u(x,t) = U^{-1}(x,t)C'(x,t)\int_0^l G(x,s,t)z(s,t)ds. \qquad (27)$$

Теперь найдем минимум функционала (4). Для этого рассмотрим функцию

$$y(t) = \int_0^l\int_0^l z'(x,t)G(x,s,t)z(s,t)dxds. \qquad (28)$$

Отсюда дифференцируя по t, имеем

$$\dot{y}(t) = \int_0^l \int_0^l \{z_t'(x,t)G(x,s,t)z(s,t) + z'(x,t)G_t(x,s,t)z(s,t) +$$
$$+ z'(x,t)G(x,s,t)z_t(s,t)\}dxds\,.$$

Подставляя сюда выражения $z_t(x,t)$ из равенства (1) и $z_t(s,t)$ из (11), получим

$$\dot{y}(t) = \int_0^l \int_0^l \{[-\Lambda(x,t)z_x(x,t) + A(x,t)z(x,t) + C(x,t)u(x,t)]'G(x,s,t)z(s,t) +$$
$$+ z'(x,t)G_t(x,s,t)z(s,t) + z'(x,t)G(x,s,t)[-\Lambda(s,t)z_s(s,t) + A(s,t)z(s,t) +$$
$$+ Q(s,t)P(s,t)]\}dxds. \qquad (29)$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^l (\Lambda(x,t)z_x(x,t))'G(x,s,t)z(s,t)dx = (\Lambda(x,t)z(x,t))'G(x,s,t)z(s,t)\Big|_{x=0}^{x=l} -$$
$$- \int_0^l z'(x,t)(\Lambda(x,t)G(x,s,t))_x z(s,t)dx,$$

$$\int_0^l z'(x,t)G(x,s,t)\Lambda(x,t)z_s(s,t)ds = z'(x,t)G(x,s,t)\Lambda(x,t)z(s,t)\Big|_{s=0}^{s=l} -$$
$$- \int_0^l z'(x,t)(G(x,s,t)\Lambda(s,t))_s z(s,t)ds.$$

Далее, подставляя вместо $P(s,t)$ ее выражение (24) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^l z'(x,t)G(x,s,t)Q(s,t)\left(\int_0^l G(s,\sigma,t)z(\sigma,t)d\sigma\right)ds =$$
$$= \int_0^l z'(x,t)\left(\int_0^l G(x,\sigma,t)Q(\sigma,t)G(\sigma,s,t)d\sigma\right)z(s,t)ds.$$

Учитывая полученные преобразования в (29), имеем

$$\dot{y}(t) = \int_0^l \int_0^l z'(x,t)[G_t + (\Lambda(x,t)G)_x + (G\Lambda(s,t))_s + A'(x,t)G + GA(s,t) +$$
$$+ \int_0^l G(x,\sigma,t)Q(\sigma,t)G(\sigma,s,t)]z(s,t)dxds +$$
$$+ \int_0^l (C(x,t)u(x,t))'\left(\int_0^l G(x,s,t)z(s,t)ds\right)dx.$$

Так как, $G(x,s,t)$ является решением задачи (20)-(22) отсюда имеем

$$\dot{y}(t)=\int_0^l\int_0^l z'(x,t)\Phi(s,t)W(s,t)z(s,t)dxds+$$

$$+\int_0^l (C(x,t)u(x,t))'\left(\int_0^l G(x,s,t)z(s,t)ds\right)dx.$$

Учитывая равенства (23) и (27), получим

$$\dot{y}(t)=\int_0^l [z'(x,t)W(x,t)z(x,t)+u'(x,t)U(x,t)u(x,t)]dx.$$

Отсюда, интегрируя по t от 0 до T имеем

$$y(T)-y(0)=\int_0^T\int_0^l [z'(x,t)W(x,t)z(x,t)+u'(x,t)U(x,t)u(x,t)]dxdt.$$

Далее, из (28) следует

$$y(T)=\int_0^l\int_0^l z'(x,T)G(x,s,T)z(s,T)dxds=$$

$$=-\int_0^l z'(x,T)\left(\int_0^l \Phi(x,s)F(s)z(s,T)ds\right)dx=$$

$$=-\int_0^l z'(x,T)F(x)z(s,T)dx.$$

Таким образом, получим

$$-y(0)=\int_0^l z'(x,T)F(s)z(x,T)dx+$$

$$+\iint_\Omega [z'(x,t)W(x,t)z(x,t)+u'(x,t)U(x,t)u(x,t)]dxdt,$$

т.е.

$$I(u)=-y(0)=-\int_0^l\int_0^l z'(x,0)G(x,s,0)z(s,0)dxds=$$

$$=-\int_0^l\int_0^l \varphi'(x)G(x,s,0)\varphi(s)dxds.$$

Теорема доказана.

5. Случай бесконечной интервалы по времени. Рассмотрим минимизацию функционала

$$I(u)=\int_0^\infty\int_0^l [z'(x,t)W(x)z(x,t)+u'(x,t)U(x)u(x,t)]dxdt \qquad (30)$$

на множестве решений задачи

$$
\begin{aligned}
&z_t + \Lambda(x) z_x - A(x) z = C(x) u(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0\ ,\\
&z(0,t) = \alpha z(0,t),\ z(l,t) = \beta z(l,t), \quad t \ge 0\ ,\\
&z(x,0) = \varphi(x),\ \lim_{t\to\infty} z(x,t) = 0, \quad 0 \le x \le l,
\end{aligned} \tag{31}
$$

где матрицы $\Lambda(x)$, $A(x), C(x)$ удовлетворяют условиям аналогичным выше наложенным.

Так как коэффициенты системы и граничные условия не зависят от аргумента t, то решение смешанной задачи удовлетворяет оценке вида $|z(x,t)| \le Ce^{-\sigma t}$ $(C > 0,\ \sigma > 0)$ ([2], стр. 264, [5], стр. 99-101) при $C(x) = 0,\ 0 \le x \le l$.

Сопряженное состояние $P(x,t)$ определяется как решение задачи

$$
\begin{aligned}
&P_t + (\Lambda(x)P\,)_x + A'(x)P = W(x)z\ ,\\
&\Lambda(0)P(0,t) = \alpha'\Lambda(0)P(0,t),\\
&\Lambda(l)P(l,t) = \beta'\Lambda(l)P(l,t),\ \ t \ge 0\\
&\lim_{t\to\infty} P(x,t) = 0, \quad 0 \le x \le l.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Если 1) вектор-функция $u(x,t)$ измерима в области $D\ \ (0 \le x \le l,\ t \ge 0)$, 2) существует соответствующее ему решение $z(x,t)$ задачи (31), 3) значение функционала $I(u)$ конечно, то управление $u(x,t)$ считается допустимым управлением.

Обозначим через $H(x,s) - (n\times n)$-матрицу, которая является решением в области $\Omega\ (0 < x < l;\ 0 < s < l)$ системы

$$
\begin{aligned}
&(\Lambda(x)H)_x + (H\Lambda(s))_s + A'(x)H + HA(s) +\\
&+\int_0^l H(x,\sigma)Q(\sigma)H(\sigma,s)d\sigma = \Phi(x,s)W(s)
\end{aligned} \tag{33}
$$

удовлетворяющим краевым условиям

$$
\begin{aligned}
&\Lambda(0)H(0,s) = \alpha'\Lambda(0)H(0,s), \quad \Lambda(l)H(l,s) = \beta'\Lambda(l)H(l,s),\\
&\Lambda(0)H(x,0) = \alpha'\Lambda(0)H(x,0), \quad \Lambda(l)H(x,l) = \beta'\Lambda(l)H(x,l),
\end{aligned} \tag{34}
$$

где

$$
Q(x) = C(x)U^{-1}(x)C'(x),\ \int_0^l \Phi(x,s)W(s)z(s,t)ds = W(x)z(x,t)\,.
$$

Теорема 5. *Пусть* $H(x,s)$ *-решение задачи (33), (34). Тогда для оптимального процесса* $(u(x,t),\ z(x,t))$ *задачи (31) имеет место*

$$
u(x,t) = U^{-1}(x)C'(x)P(x,t), \tag{35}
$$

$$
P(x,t) = \int_0^l H(x,s)z(s,t)ds \tag{36}
$$

и минимальное значение функционала (30) равно

$$I(u) = -\int_0^l \int_0^l \varphi'(x) H(x,s) \varphi(s) dx ds. \tag{37}$$

Доказательство. Сначала докажем, что функция $P(x,t)$, определенная формулой (36) является решением задачи (32). Из (36) имеем

$$P_t(x,t) = \int_0^l H(x,s) z_t(s,t) ds,$$

$$(\Lambda(x) P(x,t))_x = \int_0^l (\Lambda(x) H(x,s))_x z(s,t) ds,$$

$$A'(x) P(x,t) = \int_0^l A'(x) H(x,s) z(s,t) ds.$$

Кроме того из уравнения (1) и равенства (36), получим

$$z_t(s,t) = -\Lambda(s) z_s(s,t) + A(s) z(s,t) + Q(s) \int_0^l H(s,\sigma) z(\sigma,t) d\sigma .$$

Учитывая полученные равенства в уравнении (32), имеем

$$\int_0^l \left\{ H(x,s) \left[-\Lambda(s) z_s(s,t) + A(s) z(s,t) + Q(s) \int_0^l H(s,\sigma) z(\sigma,t) d\sigma \right] + \right. \tag{38}$$

$$\left. + (\Lambda(x) H(x,s))_x z(s,t) + A'(x) H(x,s) z(s,t) - \Phi(x,s) W(s) z(s,t) \right\} ds = 0.$$

Отсюда интегрируя по частям и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^l H(x,s) \Lambda(s) z_s(s,t) ds = H(x,s) \Lambda(s) z(s,t) \Big|_0^l - \int_0^l (H(x,s) \Lambda(s))_s z(s,t) ds,$$

$$\int_0^l H(x,s) \left(Q(s) \int_0^l H(s,\sigma) z(\sigma,t) d\sigma \right) ds = \int_0^l \left(\int_0^l H(x,\sigma) Q(\sigma,t) H(\sigma,s) d\sigma \right) z(s,t) ds.$$

Подставив полученные равенства в (38), имеем

$$\int_0^l \{ (\Lambda(x) H(x,s))_x + (H(x,s) \Lambda(s))_s + A'(x) H(x,s) + H(x,s) A(s) +$$

$$+ \int_0^l H(x,\sigma) Q(\sigma) H(\sigma,s) d\sigma - \Phi(x,s) W(s) \} z(s,t) ds = 0.$$

Справедливость полученного равенства следует из (33), (34). Как в теореме 4, для функции

$$g(t) = \int_0^l \int_0^l z'(x,t) H(x,s) z(s,t) dx ds \tag{39}$$

получим

$$g(T) - g(0) = \int_0^T \int_0^l [z'(x,t)W(x)z(x,t) + u'(x,t)U(x)u(x,t)]dxdt, \qquad (40)$$

где

$$g(T) = \int_0^l \int_0^l z'(x,T)H(x,s)z(s,T)dxds .$$

Так как по условии $\lim_{T\to\infty} z(x,T) = 0$, то $\lim_{T\to\infty} g(T) = 0$. Переходя в (40) к пределу при $T \to \infty$, получим

$$-g(0) = \int_0^\infty \int_0^l [z'(x,t)W(x)z(x,t) + u'(x,t)U(x)u(x,t)]dxdt = I(u) .$$

Далее, из (39), имеем

$$g(0) = \int_0^l \int_0^l \varphi'(x)H(x,s)\varphi(s)dxds .$$

Таким образом

$$I(u) = -g(0) = \int_0^l \int_0^l \varphi'(x)H(x,s)\varphi(s)dxds .$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
2. Годунов С.К. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1979, 392 с.
3. Жданович В.Ф. Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости. 1 // Матем.сб.47, 3(1959), 2. Матем.сб.48, 4(1959), 3. Матем.сб.49. 3(1959).
4. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978, 464 с.
5. Зеленяк Т.И., Михайлов В.П. Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач математической физики при $t \to \infty$ // «Дифференциальные уравнения с частными производными», М.: Наука, 1970, с.96-118.
6. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми с частными производными. М.: Мир, 1972, 414 с.
7. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: 1961, 400 с.
8. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла. М.: Наука, 1964, 462 с.
9. Schmaedekc Wayne. Mathematical theory of optimal control for Semilinear hyperbolic systems in two independent variables // “SIAM J.Contr”, 1967, №1, p.135-152.
10. Geveil Tung. Boundary Controls ability of hyperbolic partial differential equations // “SIAM J.Contr. and optim”, 1981, 19, №3, p.353-367.

İKİ SƏRBƏST DƏYİŞƏNLİ BİRİNCİ TƏRTİB XƏTTİ HİPERBOLİK SİSTEM ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ

K.Q.HƏSƏNOV, T.S.TANRIVERDİYEV

XÜLASƏ

İşdə iki sərbəst dəyişənli birinci tərtib xətti xüsusi törəməli hiperbolik sistem üçün qarışıq məsələ ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsi öyrənilir. Funksional inteqral kvadratik şəklində götürülür. Optimal idarəedicinin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat olunur. Optimal idarəedici üçün zəruri və kafi şərt tapılır. Optimal idarəedicinin və funksionalın minimum qiyməti qeyri-xətti inteqro-diferensial sistemin həlli vasitəsilə tapılır. Oxşar nəticə zaman intervalı sonsuz olduqda da alınır.

Açar sözlər: Hiperbolik sistem, inteqro-diferensial tənliklər, optimal idarəetmə, qoşma məsələ, qarışıq məsələ.

OPTIMAL CONTROL FOR FIRST ORDER LINEAR HYPERBOLIC SYSTEMS WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

K.K.HASANOV, T.S.TANRIVERDIYEV

SUMMARY

In the work optimal control problems are considered, describing by the first order hyperbolic system with two independent variables. The optimality criterion represents the integral quadratic functional. The existence and uniqueness for the optimal control are proved. Necessary and sufficient conditions for optimality are derived. Finding of the optimal control and the minimum of the functional is reduced to the solution of the linear integro-differential system with partial derivatives. Similar results were obtained for an infinite time interval.

Keywords: hyperbolic system, integro-differential equation, optimal control, conjugate problem, mixed problem.

Поступила в редакцию: 22.04.2013 г.
Подписано к печати: 24.05.2013 г.